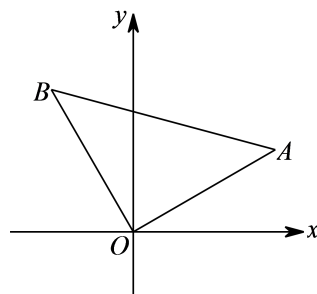


第1讲三角形常用模型（练习）

一、全等常用模型

1. 一线三垂直

1. 如图， $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形， $AB = 4$ ， OA 与 x 轴的夹角为 30° ，求 B 点的坐标（ ）。



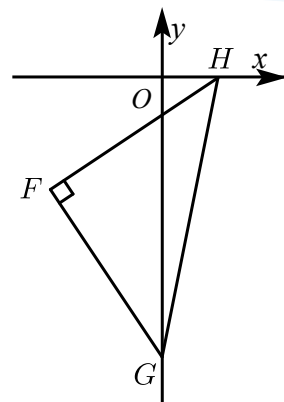
- A. $(-\sqrt{3}, 3)$ B. $(-1, \sqrt{3})$ C. $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$ D. $(-2, -2\sqrt{3})$

【答案】C

【解析】 $\because AB = 4$ 且 $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形，
 $\therefore OB = OA = 2\sqrt{2}$ ，
 $\because OA$ 与 x 轴的夹角为 30° ，可以得到 OB 与 x 轴夹角为 60° ，
此时 OB 的解析式为 $y = -\sqrt{3}x$ ，
设 B 点坐标为 $(a, -\sqrt{3}a)$ ，
 $\therefore OB^2 = a^2 + 3a^2$ ，求得 $a = \sqrt{2}$ ，
 B 点的坐标为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$ 。

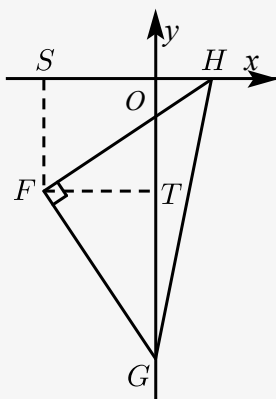
【标注】【知识点】一次函数与等腰直角三角形

2. 如图3，已知点 F 坐标为 $(-4, -4)$ ，当点 G 在 y 轴的负半轴上沿负方向运动时，作 $Rt\triangle FGH$ ，始终保持 $\angle GFH = 90^\circ$ ， FG 与 y 轴负半轴交于点 $G(0, m)$ ， FH 与 x 轴正半轴交于点 $H(n, 0)$ ，求 $m + n$ 的值。



【答案】 -8 .

【解析】 如图，过点 F 分别作 $FS \perp x$ 轴于 S 点， $FT \perp y$ 轴于 T 点，



则 $FS = FT = 4$, $\angle FHS = \angle HFT = \angle FGT$,

在 $\triangle FSH$ 和 $\triangle FTG$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle FSH = \angle FTG = 90^\circ \\ \angle FHS = \angle FGT \\ FS = FT \end{cases} ,$$

则 $\triangle FSH \cong \triangle FTG$ (AAS) ,

则 $GT = HS$,

又 $\because G(0, m)$, $H(n, 0)$, 点 F 坐标为 $(-4, -4)$,

$\therefore OT = OS = 4$, $OG = |m| = -m$, $OH = n$,

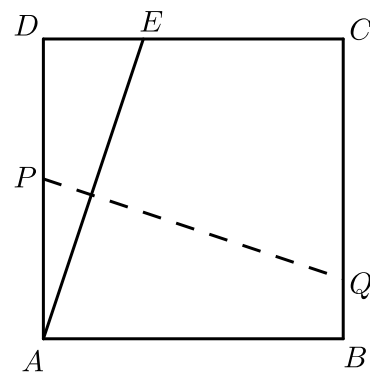
$\therefore GT = OG - OT = -m - 4$, $HS = OH + OS = n + 4$,

则 $-4 - m = n + 4$,

则 $m + n = -8$.

【标注】 【知识点】 坐标系中的动点问题 (非函数)

3. 如图，将一边长为12的正方形纸片 $ABCD$ 的顶点 A 折叠至 DC 边上的点 E ，使 $DE = 5$ ，折痕为 PQ ，则 PQ 的长为 () .



A. 12

B. 13

C. 14

D. 15

【答案】 B

【解析】 方法一：如图1，作 $QF \perp AD$ ，则 $QF = AD$ ，

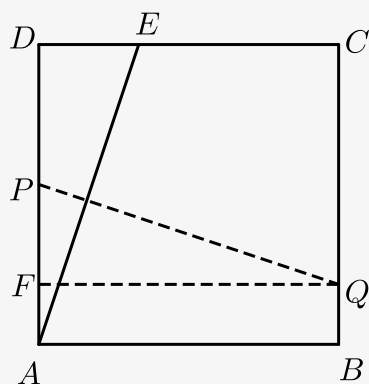


图1

易证 $\triangle ADE \cong \triangle QFP$ ，

$$\therefore QP = AE = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

方法二：如图2，过B点作 $FB \parallel PQ$ ，可证四边形 $PFBQ$ 为平行四边形，

$$FB = PQ,$$

可证 $\triangle ADE \cong \triangle BAF(ASA)$ ，

$$\therefore AE = BF = PQ,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = 13,$$

$$\therefore PQ = 13.$$

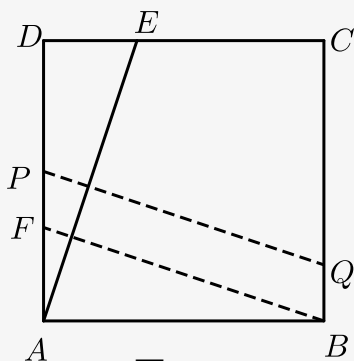


图2

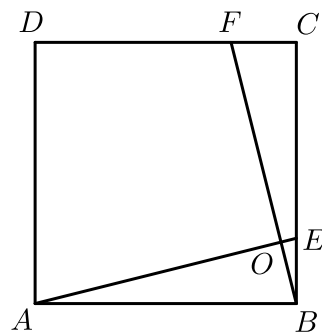
故选B.

【标注】【知识点】四边形与折叠问题

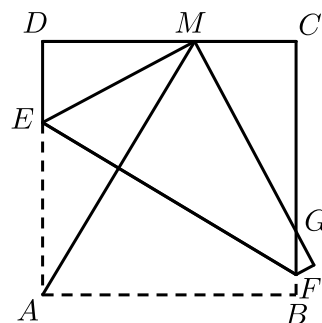
4. 在正方形 $ABCD$ 中.

(1) 如图, 若点 E, F 分别在边 BC, CD 上, AE, BF 交于点 O , 且 $\angle AOF = 90^\circ$ 求证:

$AE = BF$.



(2) 如图, 将正方形 $ABCD$ 折叠, 使顶点 A 与 CD 边上的点 M 重合, 折痕交 AD 于 E , 交 BC 于 F , 边 AB 折叠后与 BC 边交于点 G . 若 $DC = 5, CM = 2$, 求 EF 的长.



【答案】(1) 证明见解析.

(2) $\sqrt{34}$.

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB = BC, \angle ABE = \angle BCF = 90^\circ,$

$$\because \angle AOF = 90^\circ, \therefore \angle BAE + \angle OBA = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle FBC + \angle OBA = 90^\circ, \therefore \angle BAE = \angle FBC,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中

$$\therefore \begin{cases} \angle ABE = \angle BCF \\ AB = BC \\ \angle BAE = \angle FBC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF (\text{ASA}),$$

$$\therefore AE = BF.$$

(2) 如图. 由折叠的性质得 $EF \perp AM$,

过点 F 作 $FH \perp AD$ 于 H , 交 AM 于 O ,

$$\text{则} \angle ADM = \angle FHE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HAO + \angle AOH = 90^\circ, \angle HAO + \angle AMD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle POF = \angle AOH = \angle AMD,$$

又 $\because EF \perp AM$,

$$\therefore \angle POF + \angle OFP = 90^\circ, \angle HFE + \angle FEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle POF = \angle FEH, \therefore \angle FEH = \angle AMD,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AD = CD = FH = 5,$$

在 $\triangle ADM$ 和 $\triangle FHE$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle ADM = \angle FHE \\ \angle AMD = \angle FEH \\ AD = FH \end{cases},$$

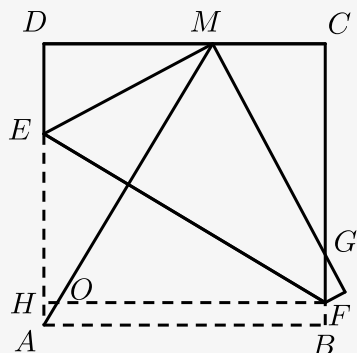
$$\therefore \triangle ADM \cong \triangle FHE (\text{AAS}),$$

$$\therefore EF = AM,$$

$$\because CM = 2, \therefore DM = DC - CM = 5 - 2 = 3,$$

$$\therefore AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34},$$

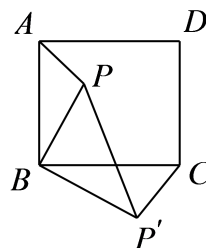
$$\therefore EF = \sqrt{34}.$$



【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

2. 手拉手模型

5. 如图，点 P 是正方形 $ABCD$ 内一点，将 $\triangle ABP$ 绕着 B 沿顺时针方向旋转到与 $\triangle CBP'$ 重合，若 $PB = 3$ ，则 PP' 的长为（ ）.



- A. $2\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. 3 D. 无法确定

【答案】 B

【解析】 $\because \triangle ABP$ 旋转到 $\triangle CBP'$.

$$\therefore \triangle ABP \cong \triangle CBP' .$$

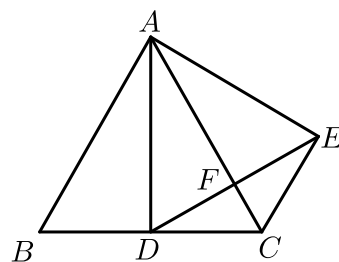
$$\therefore BP' = BP = 3 .$$

$$\therefore \angle ABC = \angle PBP' = 90^\circ .$$

$$\therefore \text{由勾股定理可得 } PP' = \sqrt{PB^2 + P'B^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} .$$

【标注】 【知识点】 利用旋转求线段长

6. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4$ ， D 是 BC 的中点，将 $\triangle ABD$ 绕点 A 旋转后得到 $\triangle ACE$ ，连接 DE 交 AC 于点 F ，则 $\triangle AEF$ 的面积为 _____ .



【答案】 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

【解析】 $\because \triangle ACE \cong \triangle ABD$,

$$\therefore AD = AE , \angle BAD = \angle CAE ,$$

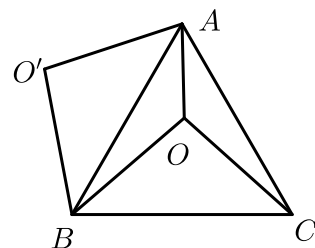
$$\therefore \angle BAD + \angle CAD = \angle BAC = 60^\circ ,$$

$$\angle CAE + \angle CAD = \angle DAE = 60^\circ ,$$

$$\begin{aligned}
&\text{又 } AD = AE, \\
&\therefore \triangle ADE \text{ 是等边三角形,} \\
&\therefore \triangle ABC \text{ 是等边三角形, } D \text{ 是 } BC \text{ 中点,} \\
&\therefore AD \perp BC, BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB = 2, \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BAC = 30^\circ, \\
&\therefore AD = \sqrt{3}BD = 2\sqrt{3}, \angle CAE = \angle BAD = 30^\circ, \\
&\therefore AE = AD = 2\sqrt{3} = DE, \\
&\therefore \angle DAE = 60^\circ, \angle CAE = 30^\circ, \\
&\therefore AF \text{ 是 } \triangle ADE \text{ 的角平分线,} \\
&\therefore AF \perp DE \text{ 且 } DF = EF = \frac{1}{2}DE = \sqrt{3}, \\
&\therefore AF = \sqrt{3}EF = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3, \\
&\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}AF \cdot EF \\
&= \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3} \\
&= \frac{3}{2}\sqrt{3}. \\
&\therefore \triangle AEF \text{ 的面积为 } \frac{3}{2}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】等边三角形与全等

7. 如图, O 是等边 $\triangle ABC$ 内一点, $OA = 6$, $OB = 8$, $OC = 10$. 将线段 BO 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到线段 BO' , 连接 $O'A$. 下列结论:
- ① 点 O 与 O' 的距离为 8;
 - ② $\angle AOB = 150^\circ$;
 - ③ $S_{\text{四边形 } AOB O'} = 24 + 16\sqrt{3}$;
 - ④ $S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COB} = 24 + 25\sqrt{3}$. 其中正确结论的序号是 _____.



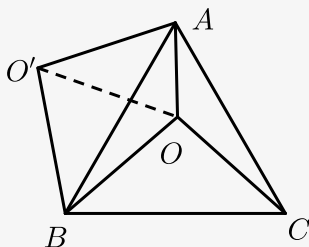
【答案】①②③④

【解析】旋转后, $\triangle BOC \cong \triangle BO'A$,
 $\therefore \triangle BO'O$ 为等边三角形, $OO' = BO = O'B = 8$,
 $O'A = OC = 10$, ①正确,

$$\therefore AO'^2 = AO^2 + OO'^2,$$

$$\therefore \angle O'OA = 90^\circ,$$

$\therefore$



$$\angle AOB = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ, \text{ ②正确,}$$

$$\therefore S_{\text{四边形}AOBO'} = S_{\triangle BO'O} + S_{\triangle AOO'}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 6 \times 8$$

$$= 24 + 16\sqrt{3}, \text{ ③正确,}$$

同理, 将 $\triangle BOC$ 绕 C 顺时针旋转 60° , 得 $\triangle AO'C$,

$$\therefore S_{\triangle AOC} + S_{\triangle COB} = S_{\triangle OO'C} + S_{\triangle AOO'}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 6 \times 8$$

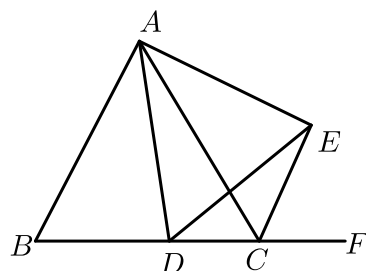
$$= 24 + 25\sqrt{3}, \text{ ④正确,}$$

$\therefore$ ①②③④正确.

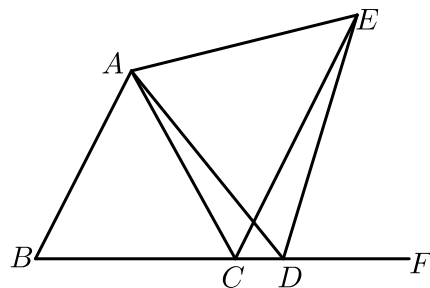
【标注】【知识点】旋转性质综合应用

8. 已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 点 D 为直线 BC 上的一动点 (点 D 不与 B 、 C 重合), 以 AD 为边作等边 $\triangle ADE$ (顶点 A 、 D 、 E 按逆时针方向排列), 连接 CE .

(1) 如图, 当点 D 在边 BC 上时, 求证: ① $BD = CE$; ② $AC = CE + CD$.

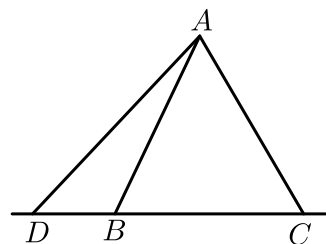


(2) 如图, 当点 D 在边 BC 的延长线上且其他条件不变时, 结论 $AC = CE + CD$ 是否成立? 若不成立, 请写出 AC 、 CE 、 CD 之间存在的数量关系, 并说明理由.



(3)

如图，当点 D 在边 BC 的反向延长线上且其他条件不变时，补全图形，并直接写出 AC 、 CE 、 CD 之间存在的数量关系．



【答案】（1）证明见解析．

（2）证明见解析．

（3）画图见解析．

【解析】（1） $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，

$$\therefore AB = AC = BC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC - \angle CAD = \angle DAE - \angle CAD, \text{ 即 } \angle BAD = \angle CAE.$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS}),$$

$$\therefore BD = CE.$$

$$\because BC = BD + CD, AC = BC,$$

$$\therefore AC = CE + CD.$$

（2） $AC = CE + CD$ 不成立，

$$AC、CE、CD\text{之间存在的数量关系是：} AC = CE - CD.$$

理由： $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，

$$\therefore AB = AC = BC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS})$$

$$\therefore BD = CE$$

$$\therefore CE - CD = BD - CD = BC = AC,$$

$$\therefore AC = CE - CD.$$

(3) 补全图形 (如图)

AC 、 CE 、 CD 之间存在数量关系是： $AC = CD - CE$.

理由： $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等边三角形，

$$\therefore AB = AC = BC, AD = AE, \angle BAC = \angle DAE = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle BAC - \angle BAE = \angle DAE - \angle BAE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

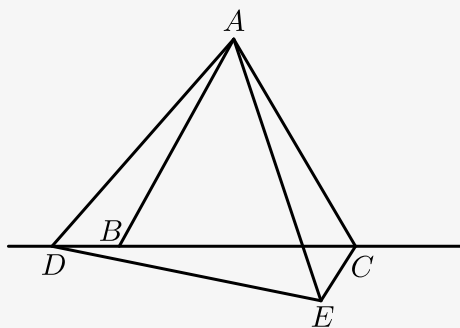
$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS})$$

$$\therefore BD = CE.$$

$$\therefore BC = CD - BD,$$

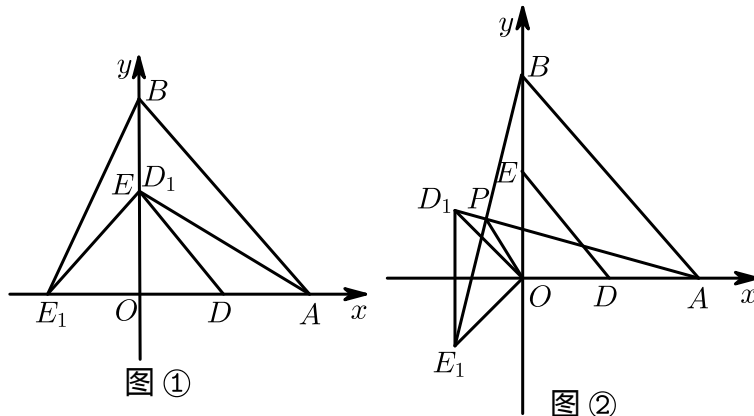
$$\therefore BC = CD - CE,$$

$$\therefore AC = CD - CE.$$



【标注】【知识点】动点与线段-无数轴

9. 已知，在平面直角坐标系中， $A(4,0)$ ， $B(0,4)$ ，点 D 、 E 分别为 OA 、 OB 的中点，将 $\triangle ODE$ 绕点 O 逆时针旋转一定角度，得到 $\triangle OD_1E_1$ ，设旋转角为 α ，记直线 AD_1 与 BE_1 的交点为 P 。



- (1) 如图①, $\alpha = 90^\circ$, 则点 D_1 的坐标是 _____, 线段 AD_1 的长等于 _____, 点 E_1 的坐标是 _____, 线段 BE_1 的长等于 _____.
- (2) 如图②, $\alpha = 135^\circ$.

- ① 求 $\angle APO$ 的大小.
- ② 求 $\frac{PD_1}{PB}$ 的值. (直接写出结果即可)

【答案】 (1) $(0, 2); 2\sqrt{5}; (-2, 0); 2\sqrt{5}$

(2) ① 45° .

② $\frac{PD_1}{PB} = \frac{1}{4}$.

【解析】 (1) 如图1, $\because$ 点 D 、 E 分别是 OA 、 OB 的中点,

$$\therefore OE = 2, OD = 2,$$

$$\text{由旋转的性质可知: } OD_1 = OD = 2, OE_1 = OE = 2,$$

$$\therefore D_1(0, 2), E_1(-2, 0),$$

$$\therefore \text{由勾股定理可知: } AD_1 = 2\sqrt{5}, BE_1 = 2\sqrt{5}.$$

(2) ① ①由旋转的性质可知: $\angle E_1OB = \angle D_1OA$,

在 $\triangle E_1OB$ 与 $\triangle D_1OA$ 中,

$$\begin{cases} OE_1 = OD_1 \\ \angle E_1OB = \angle D_1OA, \\ OB = OA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle E_1OB \cong \triangle D_1OA \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle BE_1O = \angle AD_1O,$$

$$\text{又} \because \angle PCD_1 = \angle OCE_1,$$

$$\therefore \angle D_1PE_1 = \angle D_1OE_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle APB = 90^\circ,$$

$$\therefore A、O、P、B \text{ 四点共圆},$$

$$\therefore \angle APO = \angle OBA = 45^\circ.$$

② 如图②, $\because \angle APO = 45^\circ$,

$$\therefore \angle D_1PO = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD_1 = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD_1 = \angle D_1PO,$$

$$\therefore \angle OD_1A = \angle OD_1A,$$

$$\therefore \triangle OD_1P \sim \triangle AD_1O,$$

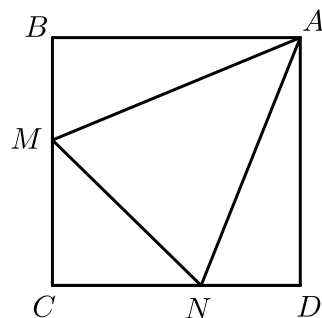
$$\therefore \frac{OP}{AO} = \frac{D_1P}{D_1O},$$

$$\begin{aligned}
&\because AO = 4, D_1O = 2, \\
&\therefore \frac{OP}{4} = \frac{D_1P}{2}, \\
&\therefore OP = 2D_1P, \\
&\because \triangle E_1OB \cong \triangle D_1OA, \\
&\therefore \angle OAD_1 = \angle OBE_1, \\
&\therefore \angle BPO = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ, \\
&\therefore \angle BPO = \angle AOD_1, \\
&\therefore \triangle AOD_1 \sim \triangle BPO, \\
&\therefore \frac{AO}{BP} = \frac{OD_1}{PO}, \\
&\therefore BP = 2PO, \\
&\therefore BP = 4PD_1, \\
&\therefore \frac{PD_1}{PB} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

3. 角含半角模型

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB = BC = CD = DA$ ， $\angle BAD = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ，点 M 、 N 分别在边 BC 、 CD 上，且 $\angle MAN = 45^\circ$ ，若 $BM = 3$ ， $ND = 2$ ， MN 的长度为_____。



【答案】5

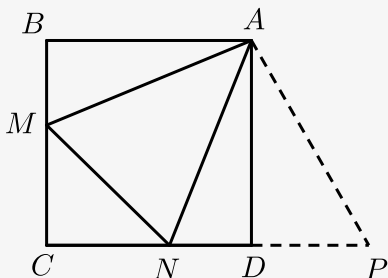
【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 中， $AB = BC = CD = DA$ ， $\angle BAD = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ，
 $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，
 如图，旋转 $\triangle ABM$ 至 $\triangle ADP$ 位置，
 $\therefore \angle PAM = \angle DAM + \angle MAB = 90^\circ$ ， $AP = AM$ ， $AN = AN$ ，
 $\angle PAN = \angle PAM - \angle MAN = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle MAN$ ，
 在 $\triangle PAN$ 和 $\triangle MAN$ 中，

$$\begin{cases} AM = AP \\ \angle PAN = \angle MAN, \\ AN = AN \end{cases}$$

$\therefore \triangle PAN \cong \triangle MAN$ (SAS),

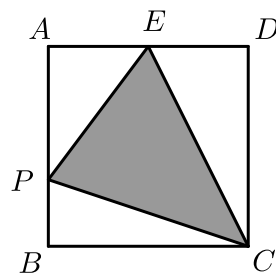
$\therefore MN = NP$,

$\therefore MN = PN = PD + DN = BM + DN = 3 + 2 = 5$.



【标注】【知识点】正方形中的半角模型

11. 如图：正方形 $ABCD$ 的边长为 6 cm ， E 是 AD 的中点，点 P 在 AB 上，且 $\angle ECP = 45^\circ$ 。则 PE 的长是 cm 。 $\triangle PEC$ 的面积是 cm^2 。



【答案】 5 ; 15

【解析】 方法一：此题为角含半角模型，可以利用旋转。

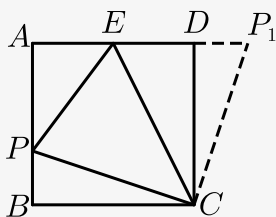
$$PE = PB + ED,$$

设 $BP = x$ ， $PE = x + 3$ ， $AP = 6 - x$ ，根据勾股定理，故 $x = 2$ 。

即 $PB = 2\text{ cm}$ ， $PE = 5\text{ cm}$ 。

$$S_{\triangle PEC} = \frac{1}{2} PE \cdot CD = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15\text{ cm}^2.$$

方法二：如图，



将 $\triangle PCB$ 旋转至 $\triangle P_1CD$ ，

在 $\triangle PCE$ 和 $\triangle P_1CE$ 中，

$$\therefore \begin{cases} PC = P_1C \\ \angle PCE = \angle P_1CE = 45^\circ, \\ CE = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle PCE \cong \triangle P_1CE$,

$$\therefore PE = P_1E = ED + P_1D = ED + BP.$$

令 $PB = x$ ，则 $PA = 6 - x$ ， $PE = 3 + x$ 。

在 $\text{Rt}\triangle APE$ 中，由勾股定理得，

$$AP^2 + AE^2 = PE^2, \text{ 即 } (6 - x)^2 + 3^2 = (3 + x)^2,$$

解得 $x = 2$ 。

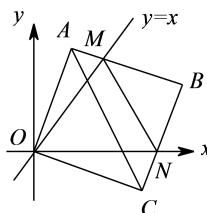
$$\therefore PE = 3 + x = 5.$$

$$\therefore S_{\triangle PCE} = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\triangle APE} - S_{\triangle BPC} - S_{\triangle CDE} = 36 - 6 - 6 - 9 = 15.$$

故答案为：5；15。

【标注】【知识点】方程思想在勾股定理的应用；正方形中的半角模型

12. 在平面直角坐标系中，边长为2的正方形 $OABC$ 的两顶点 A 、 C 分别在 y 轴的正半轴上，点 O 在原点。现将正方形 $OABC$ 绕 O 点顺时针旋转，当 A 点第一次落在直线 $y = x$ 上时停止旋转，旋转过程中， AB 边交直线 $y = x$ 于点 M ， BC 边交 x 轴于点 N （如图）



- (1) 求 OA 在旋转过程中所扫过的面积；
- (2) 旋转过程中，当 MN 与 AC 平行时，求正方形 $OABC$ 旋转的度数；
- (3) 设 MBN 的周长为 P ，在正方形 $OABC$ 旋转的过程中， P 值是否有变化？请证明你的结论。

【答案】 (1) $\frac{\pi}{2}$

(2) 22.5°

(3) 不变

【解析】 (1) $S = \frac{\pi}{8}|OA|^2 = \frac{\pi}{8} \times 2^2 = \frac{\pi}{2}$

(2) $MN \parallel AC$

$$\angle ACB = 45^\circ \therefore \angle BNM = 45^\circ$$

$$\text{又 } \angle B = 90^\circ \therefore BM = BN, \therefore AM = NC.$$

$$\begin{aligned} &\therefore \begin{cases} OA = OC \\ \angle DAM = \angle OCN \therefore \triangle ADM \cong \triangle CON \text{ (SAS)} \\ AM = AC \end{cases} \\ &\therefore \angle AOM = \angle CON \text{ 又 } \angle AOy = \angle CON \\ &\therefore \angle AOM = \frac{1}{2} \angle MOy = \frac{1}{2} \times 45^\circ = 22.5^\circ \end{aligned}$$

(3) 延长BA交y轴于E

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \angle ADE = \angle CON \\ OA = ON \\ \angle OAE = \angle ONC \end{cases} \Rightarrow \triangle AOE \cong \triangle CON \text{ (ASA)} \\ &\therefore AE = CN, OE = ON \end{aligned}$$

连接MN

$$\therefore \begin{cases} OE = ON \\ \angle MOE = \angle MON \therefore \triangle MOE \cong \triangle MON \text{ (SAS)} \\ OM = OM \end{cases}$$

$$\therefore MN = ME = AE + AM = NC + AM$$

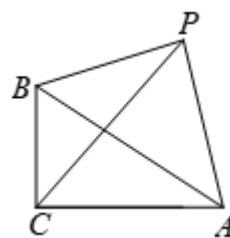
$$\therefore MN + BM + BN = (NC + BN) + (AM + BM) = 2 \times 2 = 4$$

$\therefore$ 不变.

【标注】【知识点】正方形与全等综合

4. 对角互补模型

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = \angle APB = 90^\circ$, $AP = BP$, $AC = 4$, $BC = 3$, 则CP的长等于 ____.



【答案】 $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

【解析】过P作 $PF \perp BC$ 于F, $PE \perp AC$ 于E,

$$\therefore \angle ACB = \angle APB = 90^\circ,$$

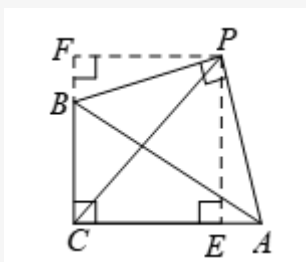
$$\therefore \text{四边形PFCE为矩形},$$

$$\therefore \angle EPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FPB + \angle BPE = 90^\circ,$$

$$\angle APE + \angle BPE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FPB = \angle APE.$$



在 $\triangle FPB$ 和 $\triangle APE$ 中，

$$\begin{cases} \angle F = \angle PAE = 90^\circ \\ \angle FPB = \angle APE \\ PB = PA \end{cases},$$

 $\therefore \triangle FPB \cong \triangle APE (\text{AAS}).$

$\therefore PF = PE,$

$\therefore$ 矩形 $FCEP$ 为正方形.

$\therefore BF = AE = \frac{1}{2}.$

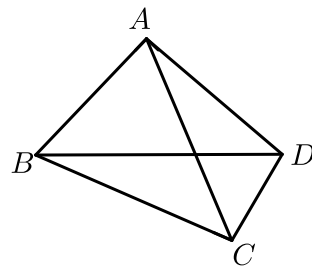
$\therefore CE = PE = \frac{7}{2}.$

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle PEC$ 中， $\angle PEC = 90^\circ,$

$PC = \sqrt{CE^2 + PE^2}$
 $= \frac{7}{2}\sqrt{2}.$

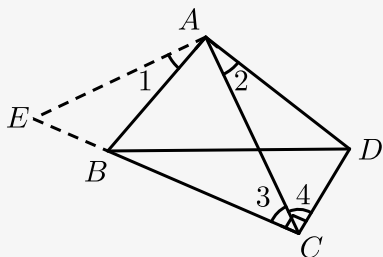
【标注】【知识点】作三角形的高，中线和角平分线

14. 游哥哥测量如图所示的四边形 $ABCD$ 时，测得该四边形的面积为 18cm^2 ，
 $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ，他马上得到 AC 的长度为 _____ cm .



【答案】 6

【解析】 如图所示，延长 CB 到点 E ，连接 AE ，使 $AE \perp AC$ ，



$\therefore EA \perp AC$ ， $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = 90^\circ - \angle BAC$ ， $\angle 2 = 90^\circ - \angle BAC$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，

又 $\because \angle E = 90^\circ - \angle 3$ ， $\angle 4 = 90^\circ - \angle 3$ ，

$\therefore \angle E = \angle 4$ ，

又 $\because AB = AD$,

$\therefore$ 在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle E = \angle 4, \\ AB = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle ACD$,

$\therefore AE = AC$,

$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = S_{\triangle AEC}$, 且 $\triangle AEC$ 为等腰直角三角形,

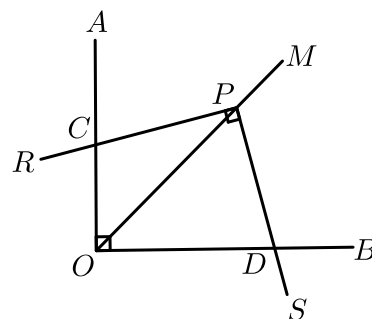
$$\therefore \frac{1}{2} AC^2 = 18,$$

$\therefore AC = 6$.

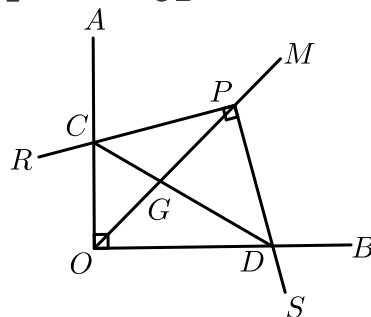
【标注】【知识点】等腰直角三角形与全等

15. 已知 $\angle AOB = 90^\circ$, OM 是 $\angle AOB$ 的平分线, 将一个直角 RPS 的直角顶点 P 在射线 OM 上移动, 点 P 不与点 O 重合.

(1) 如图, 当直角 RPS 的两边分别与射线 OA 、 OB 交于点 C 、 D 时, 请判断 PC 与 PD 的数量关系, 并证明你的结论.



(2) 如图, 在(1)的条件下, 设 CD 与 OP 的交点为点 G , 且 $PG = \frac{\sqrt{3}}{2} PD$, 求 $\frac{GD}{OD}$ 的值.



【答案】(1) PC 与 PD 的数量关系是相等, 证明见解析.

$$(2) \frac{GD}{OD} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【解析】(1) 过点 P 作 $PH \perp OA$, $PN \perp OB$, 垂足分别为点 H 、 N .

$\because \angle AOB = 90^\circ$, 易得 $\angle HPN = 90^\circ$.

$\therefore \angle 1 + \angle CPN = 90^\circ$,

而 $\angle 2 + \angle CPN = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

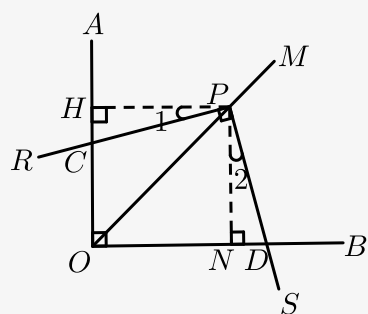
$\because OM$ 是 $\angle AOB$ 的平分线 ,

$\therefore PH = PN$,

又 $\because \angle PHC = \angle PND = 90^\circ$,

$\therefore \triangle PCH \cong \triangle PDN$.

$\therefore PC = PD$.



(2) $\because PC = PD$, $\angle CPD = 90^\circ$,

$\therefore \angle 3 = 45^\circ$,

$\therefore \angle POD = 45^\circ$,

$\therefore \angle 3 = \angle POD$.

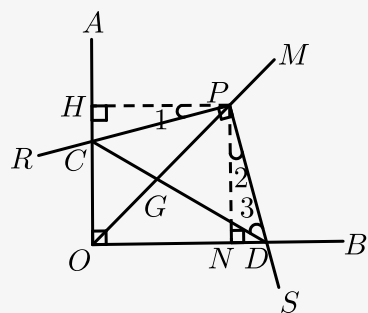
又 $\because \angle GPD = \angle DPO$,

$\therefore \triangle POD \sim \triangle PDG$.

$\therefore \frac{GD}{OD} = \frac{PG}{PD}$.

$\because PG = \frac{\sqrt{3}}{2} PD$,

$\therefore \frac{GD}{OD} = \frac{PG}{PD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

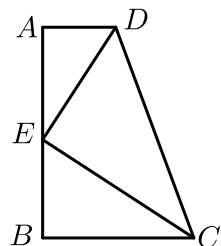


【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

二、相似常用模型

1. 一线三等角模型

16. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ，点 E 在 AB 上， $\angle DEC = 90^\circ$ 。



(1) 求证： $\triangle ADE \sim \triangle BEC$ 。

(2) 若 $AD = 1$ ， $BC = 3$ ， $AE = 2$ ，求 AB 的长。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $AB = \frac{7}{2}$ 。

【解析】 (1) $\because AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ，

$$\therefore AD \perp AB, \angle B = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle AED = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle AED + \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle BEC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BEC.$$

(2) $\because \triangle ADE \sim \triangle BEC$,

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{AD}{BE},$$

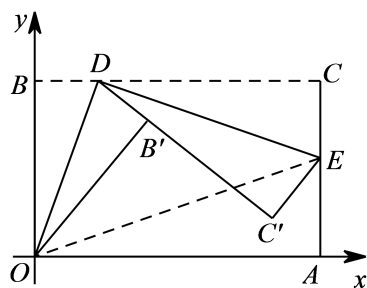
$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{1}{BE},$$

$$\therefore BE = \frac{3}{2},$$

$$\therefore AB = AE + EB = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

17. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 置于直角坐标系中，点 $A(4,0)$ ，点 $B(0,3)$ ，点 D （异于点 B 、 C ）为边 BC 上动点，过点 O 、 D 折叠纸片，得点 B' 和折痕 OD 。过点 D 再次折叠纸片，使点 C 落在直线 DB' 上，得点 C' 和折痕 DE ，连接 OE ，设 $BD = t$ 。



- (1) 当 $t = 1$ 时, 求点 E 的坐标;
- (2) 设 $S_{\text{四边形}OECB} = s$, 用含 t 的式子表示 s (要求写出 t 的取值范围);
- (3) 当 OE 取最小值时, 求点 E 的坐标.

【答案】 (1) 点 E 的坐标为 $(4, 2)$.

(2) $S = -\frac{2}{3}t^2 + \frac{8}{3}t + 6$ ($0 < t < 4$);

(3) E 的坐标为 $(4, \frac{5}{3})$.

【解析】 (1) 由折叠的性质可知, $\angle ODB = \angle ODB'$, $\angle EDC = \angle EDC'$,

$$\therefore \angle ODE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDO + \angle CDE = 90^\circ, \text{ 又 } \angle BDO + \angle BOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = \angle CDE,$$

$$\because BD = t = 1, BC = 4,$$

$$\therefore CD = 3, \text{ 又 } OB = 3,$$

$$\therefore OB = CD,$$

在 $\triangle BOD$ 和 $\triangle CDE$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle C \\ OB = CD \\ \angle BOD = \angle CDE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BOD \cong \triangle CDE,$$

$$\therefore CE = BD = 1,$$

$$\therefore AE = AC - CE = 2,$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 的坐标为 } (4, 2);$$

(2) $\because BD = t,$

$$\therefore DC = BC - BD = 4 - t,$$

$$\text{由 (1) 得, } \angle BOD = \angle CDE, \text{ 又 } \angle B = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ODB \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{BD}{CE} = \frac{OB}{DC}, \text{ 即 } \frac{t}{CE} = \frac{3}{4-t},$$

$$\text{解得, } CE = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{3}t,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times (CE + OB) \times BC = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{3}t + 3 \right) \times 4,$$

$$\therefore S = -\frac{2}{3}t^2 + \frac{8}{3}t + 6 \quad (0 < t < 4);$$

$$(3) \text{ 在Rt}\triangle OEA \text{ 中, } OE^2 = OA^2 + AE^2 = 4^2 + AE^2,$$

$\therefore$ 当 AE 最小时, OE 最小,

$$\text{由 (2) 得, } CE = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{3}t,$$

$$\therefore AE = AC - CE = \frac{1}{3}t^2 - \frac{4}{3}t + 3 = \frac{1}{3}(t-2)^2 + \frac{5}{3},$$

当 $t = 2$ 时, AE 的最小值为 $\frac{5}{3}$,

此时点 E 的坐标为 $\left(4, \frac{5}{3}\right)$.

【标注】【知识点】二次函数与动点问题

18. 如图1, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是两个全等的等腰直角三角形, $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$, $\triangle DEF$ 的顶点 E 与 $\triangle ABC$ 的斜边 BC 的中点重合. 将 $\triangle DEF$ 绕点 E 旋转到如图2, 线段 DE 与线段 AB 相交于点 P , 线段 EF 与线段 CA 的延长线相交于点 Q .

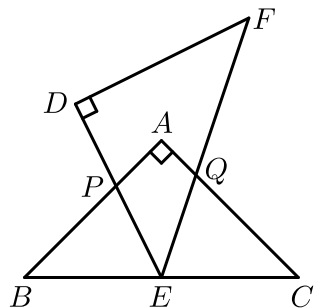


图1

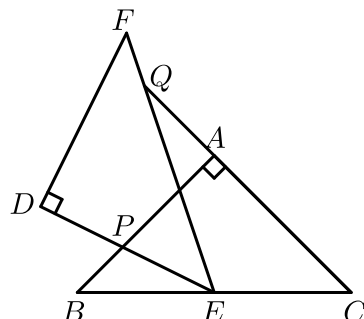


图2

(1) 求证: $\triangle BPE \sim \triangle CEQ$.

(2) 已知 $BP = a$, $CQ = \frac{9}{2}a$, 求 P 、 Q 两点间的距离 (用含 a 的代数式表示).

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) $\frac{5}{2}a$.

【解析】 (1) $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是两个全等的等腰直角三角形,

$$\therefore \angle B = \angle C = \angle DEF = 45^\circ,$$

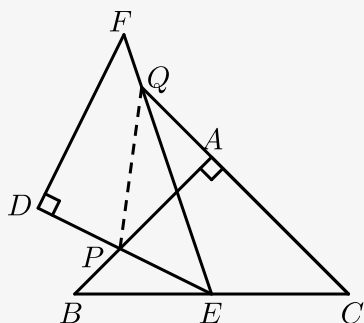
$$\therefore \angle BEP + \angle CEQ = 135^\circ, \angle CQE + \angle CEQ = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle BEP = \angle CQE,$$

$$\text{又} \because \angle B = \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle BPE \sim \triangle CEQ.$$

(2) 连接 PQ ,



$$\therefore \triangle BPE \sim \triangle CEQ,$$

$$\therefore \frac{BP}{CE} = \frac{BE}{CQ},$$

$$\therefore BP = a, CQ = \frac{9}{2}a, BE = CE,$$

$$\therefore BE = CE = \frac{3}{2}\sqrt{2}a,$$

$$\therefore BC = 3\sqrt{2}a,$$

$$\therefore AB = AC = 3a,$$

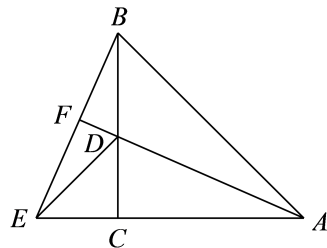
$$\therefore AQ = \frac{3}{2}a, PA = 2a,$$

$$\text{在 Rt}\triangle APQ \text{ 中, } PQ = \sqrt{AQ^2 + AP^2} = \frac{5}{2}a.$$

【标注】【知识点】一线三等角相似

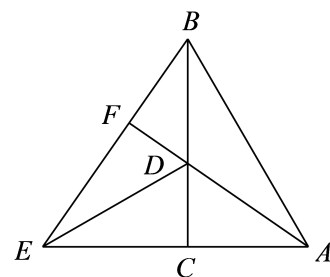
2. 手拉手模型

19. 把两个含有 45° 角的直角三角板如图放置, 点 D 在 BC 上, 连接 BE 、 AD , AD 的延长线交于 BE 于点 F .

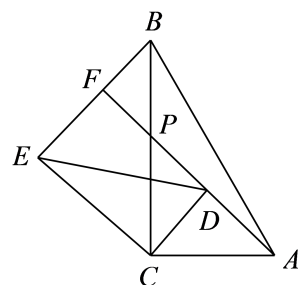


(1) 问: AD 与 BE 在数量上和位置上分别有何关系? 说明理由.

(2) 若将 45° 角换成 30° , 如图所示, AD 与 BE 在数量和位置上分别有何关系? 说明理由.



(3) 若将 (2) 中两个三角板旋转成如图的位置 , 则 (2) 中结论是否仍然成立 , 说明理由 .



【答案】 (1) $AD \perp BE$, $AD = BE$.

(2) $BE = \sqrt{3}AD$, $AD \perp BE$.

(3) 成立 .

【解析】 (1) $\because$ 把两个含有 45° 角的直角三角板如图放置 ,

$\therefore \triangle EDC$, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形 ,

$\therefore EC = DC$, $AC = BC$, $\angle DCE = \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle CDE \cong \triangle ABC$ (SAS) ,

$\therefore \angle ADC = \angle BEC$, $AD = BE$,

$\therefore \angle DAC + \angle BEC = \angle DAC + \angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore AD \perp BE$, $AD = BE$.

(2) $\because$ 若将 45° 角换成 30° ,

$\therefore \frac{EC}{DC} = \sqrt{3}$, $\frac{BC}{AC} = \sqrt{3}$,

$\therefore \frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC}$,

$\therefore \angle DCE = \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle CDE \sim \triangle ABC$,

$\therefore \angle ADC = \angle BEC$, $\frac{BE}{AD} = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle DAC + \angle BEC = \angle DAC + \angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore BE = \sqrt{3}AD$, $AD \perp BE$.

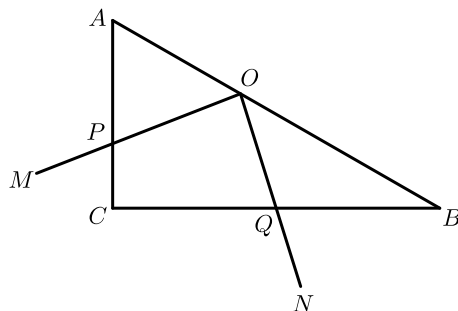
(3) $\because \angle DCE = \angle ACB = 90^\circ$,

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle BCE = \angle ACD, \\
&\therefore \frac{EC}{DC} = \sqrt{3}, \frac{BC}{AC} = \sqrt{3}, \\
&\therefore \frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC}, \\
&\therefore \triangle CDE \sim \triangle ABC, \\
&\therefore \angle ADC = \angle BEC, \frac{BE}{AD} = \sqrt{3}, \\
&\therefore \angle DAC + \angle BEC = \angle DAC + \angle ADC = 90^\circ, \\
&\therefore BE = \sqrt{3}AD, AD \perp BE.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

3. 对角互补模型

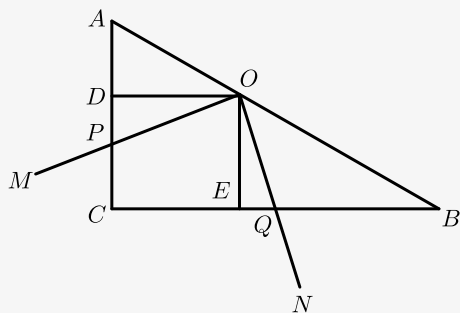
20. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ，直角 $\angle MON$ 的顶点 O 在 AB 上， OM 、 ON 分别交 CA 、 CB 于点 P 、 Q ， $\angle MON$ 绕点 O 任意旋转．当 $\frac{OA}{OB} = \frac{1}{2}$ 时， $\frac{OP}{OQ}$ 的值为 _____；
当 $\frac{OA}{OB} = \frac{1}{n}$ 时， $\frac{OP}{OQ}$ 的值为 _____．（用含 n 的式子表示）



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ； $\frac{\sqrt{3}}{n}$ ．

【解析】 $\because \angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，

$\therefore$



$$\frac{AC}{CB} = \tan \angle B = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

过 O 作 $OD \perp AC$ ， $OE \perp BC$ ，

$$\therefore \frac{AD}{DO} = \frac{OE}{EB} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{OA}{OB} &= \frac{1}{2}, \text{ 且 } \triangle ADO \sim \triangle OEB, \\ \therefore \frac{AD}{DO} &= \frac{1}{2}. \\ \therefore \frac{OE}{EB} &= \frac{1}{2}. \\ \therefore \frac{DD}{OE} &= \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \text{同理当 } \frac{OA}{OB} &= \frac{1}{n} \text{ 时, } \frac{OP}{OQ} = \frac{\sqrt{3}}{n}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】旋转类相似